

Devoir Maison 2

Pour le 6 octobre 2025

Exercice*(adapté de EDHEC ECS 2020)*

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$).

Partie I — Préliminaires

- On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
 - Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
 - Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$
 - Notons $r = \text{Rang}(p)$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad p(e_k) = e_k, \quad \forall k \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad p(e_k) = 0_E$$

- En écrivant la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, montrer que $\text{Rg}(p) = \text{Tr}(p)$
- Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $q = p_1 + p_2$ soit un projecteur.

- Montrer que, si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q est un projecteur.

On suppose désormais que q est un projecteur.

- Montrer que $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$
 - Justifier que $\text{Rang}(q) = \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2)$ et que

$$\dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)) \leq \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2))$$

- En déduire que $\text{Im}(q) = \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$ puis que $\text{Im}(p_1 + p_2) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2)$
- Soit $x \in E$, montrer que $p_1(x) \in \text{Ker}(q - \text{Id})$.
 - En déduire que $q \circ p_1 = p_1$ et $q \circ p_2 = p_2$.
 - En déduire qu'alors $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - Conclure

Partie III — Généralisation

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E , notés $p_1, p_2, \dots, p_k$ et on note $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. On veut généraliser le résultat précédente à une somme de $k \geq 2$ projecteurs.

- Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{Rang}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - Établir finalement l'égalité

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

3. (a) Montrer que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
- (b) En déduire que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0$.
- (c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Corrigé

Corrigé de l'exercice

Partie I — Préliminaires

1. (a) Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Il existe ainsi $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

De plus on a

$$0_E = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$$

On en déduit que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$.

D'après le théorème du rang on a $\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(E)$.

En conclusion on a $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

- (b) On va procéder par double inclusion

— Soit $x \in \text{Im}(p)$, il existe alors $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

Ainsi

$$(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = p(y) - p \circ p(y) = p(y) - p(y) = 0_E$$

Et donc $x \in \text{Ker}(\text{Id} - p)$.

Ce qui montre que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(\text{Id} - p)$

— Soit maintenant $x \in \text{Ker}(\text{Id} - p)$, on a donc $p(x) = x$. Ainsi $x \in \text{Im}(p)$.

Ceci montre que $\text{Ker}(\text{Id} - p) \subset \text{Im}(p)$.

Finalement on a bien $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$.

- (c) Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\text{Ker}(p)$.

D'après les questions précédentes on a

$$E = \text{Ker}(\text{Id} - p) \oplus \text{Ker}(p)$$

Ainsi la famille $(e_1, \dots, e_p)$ obtenue par concatenation est une base de E (et en particulier $p = n$).

On sait que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad e_k \in \text{Ker}(\text{Id} - p), \quad \forall k \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad e_k \in \text{Ker}(p)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad p(e_k) = e_k, \quad \forall k \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad p(e_k) = 0_E}$$

- (d) Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\dim(\text{Ker}(\text{Id} - p))} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\dim(\text{Ker}(p))}$

D'où

$$\text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)) = \dim(\text{Ker}(\text{Id} - p)) = \dim(\text{Im}(p)) = \text{rg}(p)$$

On obtient bien $\boxed{\text{Rg}(p) = \text{Tr}(p)}$.

2. On va procéder par récurrence sur n

Initialisation :

Il est clair que $\dim(E_1) \leq \dim(E_1)$

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$, et $E_1, \dots, E_k, E_{k+1}$ des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Notons $F = E_1 + \dots + E_k$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de E_{k+1} . Alors la famille $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est une famille génératrice de $F + E_{k+1}$.

On a alors

$$\dim(F + E_{k+1}) \leq \text{Card}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) \leq n + p$$

Ainsi

$$\dim(F + E_{k+1}) \leq \dim(F) + \dim(E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1})$$

Ce qui prouve la propriété voulue au rang $k + 1$.

Par principe de récurrence on a montré que

si $E_1, \dots, E_k$, sont des sous-espaces vectoriels de E alors

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Remarque

On aurait aussi pu utiliser la formule de Grassman appliquée à F et E_{k+1} pour prouver l'hérédité

Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de deux projecteurs soit un projecteur

1. On suppose que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a alors

$$\begin{aligned} q \circ q &= (p_1 + p_2) \circ (p_1 + p_2) \\ &= p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 \\ &= p_1 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 && \text{par hypothèse} \\ &= p_1 + p_2 && \text{car } p_1 \text{ et } p_2 \text{ sont des projecteurs} \\ &= q \end{aligned}$$

Ainsi $q \circ q = q$, q est donc bien un projecteur.

2. On suppose désormais que q est un projecteur.

(a) Soit $y \in \text{Im}(q)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = q(x)$.

Ainsi $y = p_1(x) + p_2(x)$. Comme $p_1(x) \in \text{Im}(p_1)$ et $p_2(x) \in \text{Im}(p_2)$ on a donc $y \in \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$

On a ainsi montré que

$$\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$$

(b) On sait que q, p_1 et p_2 sont des projecteurs, ainsi, d'après la question 1.(d) de la partie I on a $\text{Rang}(q) = \text{Tr}(q)$, $\text{Rang}(p_1) = \text{Tr}(p_1)$ et $\text{Rang}(p_2) = \text{Tr}(p_2)$.

D'où

$$\begin{aligned} \text{Rang}(q) &= \text{Tr}(q) \\ &= \text{Tr}(p_1 + p_2) \\ &= \text{Tr}(p_1) + \text{Tr}(p_2) && \text{car l'application Trace est linéaire} \\ &= \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Rang}(q) = \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2)}$$

La question 2. de la partie I appliquée aux sous-espaces vectoriels $\text{Im}(p_1)$ et $\text{Im}(p_2)$ nous assure que

$$\boxed{\dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)) \leq \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2))}$$

- (c) On sait déjà que $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$, il nous suffit donc de montrer que $\dim(\text{Im}(q)) = \dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2))$.

Comme $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$ alors $\dim(\text{Im}(q)) \leq \dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2))$

De plus on a

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(q)) &= \text{Rang}(q) \\ &= \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2) \\ &= \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2)) \\ &\geq \dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)) \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\dim(\text{Im}(q)) = \dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2))$ et donc que

$$\boxed{\text{Im}(q) = \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)}$$

Par conséquent on a $\dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2)) = \dim(\text{Im}(q)) = \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2))$ et ainsi

$$\boxed{\text{Im}(p_1 + p_2) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2)}$$

3. (a) Soit $x \in E$, comme q est un projecteur on a $\text{Ker}(q - \text{Id}) = \text{Im}(q)$.

Or $p_1(x) \in \text{Im}(p_1) \subset \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) = \text{Im}(q)$. Ainsi

$$\boxed{p_1(x) \in \text{Ker}(q - \text{Id})}$$

- (b) On a montré que, pour tout $x \in E$, $p_1(x) \in \text{Ker}(q - \text{Id})$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in E, \quad q(p_1(x)) - p_1(x) = 0_E$$

Ainsi

$$\forall x \in E, \quad (q \circ p_1)(x) = p_1(x)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{q \circ p_1 = p_1}$$

En reprenant ces arguments en remplaçant p_1 par p_2 on prouve mutatis mutandis que

$$\boxed{q \circ p_2 = p_2}$$

- (c) On a

$$p_1 = q \circ p_1 = (p_1 + p_2) \circ p_1 = p_1 \circ p_1 + p_2 \circ p_1 = p_1 + p_2 \circ p_1$$

Ainsi $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ De même

$$p_2 = q \circ p_2 = (p_1 + p_2) \circ p_2 = p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_2 = p_1 \circ p_2 + p_2$$

et donc $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Finalement on a bien

$$\boxed{p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

4. On a montré que, si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q est un projecteur et que, si q est un projecteur alors $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On en conclut donc que

$$\boxed{q \text{ est un projecteur} \quad \text{si et seulement si} \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

Partie III — Généralisation

1. On suppose que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 q_k \circ q_k &= \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \circ q_k \\
 &= \sum_{i=1}^k p_i \circ q_k \\
 &= \sum_{i=1}^k p_i \circ \left(\sum_{j=1}^k p_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j \\
 &= \sum_{i=1}^k p_i \circ p_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p_i \circ p_j \\
 &= \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k 0_{\mathcal{L}(E)} \\
 &= q_k + 0_{\mathcal{L}(E)} \\
 &= q_k
 \end{aligned}$$

On a donc $q_k \circ q_k = q_k$. q_k est donc un projecteur.

2. (a) Soit $x \in \text{Im}(q_k)$, et soit $y \in E$ tel que $x = q_k(y)$.

On a alors

$$x = q_k(y) = \sum_{i=1}^n p_i(y)$$

Ainsi $x \in \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.

On a donc bien

$$\text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$$

- (b) On a

$$\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(q_k)) \leq \dim \left(\sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i) \right)$$

De plus, comme q_k et les applications linéaires $(p_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ sont des projecteurs, on a, d'après la question 1.(c)

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(q_k) &= \text{Tr}(q_k) \\
 &= \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \text{Tr}(p_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \dim(\text{Im}(p_i)) \\
 &\geq \dim \left(\sum_{i=1}^k \text{Im}(p_i) \right) \quad \text{d'après la question 2.}
 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$\operatorname{rg}(q_k) = \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k))$$

On sait que $\operatorname{Im}(q_k) \subset \operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$ et

$$\dim(\operatorname{Im}(q_k)) = \dim(\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k))$$

Ainsi

$$\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$$

(c) On a vu que

$$\operatorname{rg}(q_k) = \dim\left(\sum_{i=1}^k \operatorname{Im}(p_i)\right) \leq \sum_{i=1}^k \dim(\operatorname{Im}(p_i)) \leq \operatorname{rg}(q_k)$$

Ainsi

$$\dim\left(\sum_{i=1}^k \operatorname{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^k \dim(\operatorname{Im}(p_i))$$

La somme $\operatorname{Im}(p_1) + \dots + \operatorname{Im}(p_k)$ est donc une somme directe, d'où

$$\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$$

3. (a) Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

D'après la question précédente on a

$$\operatorname{Im}(p_j) \subset \operatorname{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Im}(p_k) \subset \operatorname{Im}(q_k)$$

Comme q_k est un projecteur, on a $\operatorname{Im}(q_k) = \operatorname{Ker}(Id - q_k)$.

Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad p_j(x) \in \operatorname{Ker}(Id - q_k)$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad p_j(x) = q_k \circ p_j(x)$$

où encore $p_j = q_k \circ p_j$.

(b) Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} p_j(x) &= q_k \circ p_j(x) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \circ p_j(x) \\ &= p_j \circ p_j(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) \\ &= p_j(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0.$$

On a donc montré que

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \forall x \in E, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0$$

(c) Soit $x \in E$, d'après la question précédente on a

$$\underbrace{p_1(p_j(x))}_{\in \text{Im}(p_1)} + \underbrace{p_2(p_j(x))}_{\in \text{Im}(p_2)} + \dots + \underbrace{p_{j-1}(p_j(x))}_{\in \text{Im}(p_{j-1})} + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_j)} + \underbrace{p_{j+1}(p_j(x))}_{\in \text{Im}(p_{j+1})} + \dots + \underbrace{p_k(p_j(x))}_{\in \text{Im}(p_k)} = 0_E$$

et

$$\underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_1)} + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_2)} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_{j-1})} + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_j)} + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_{j+1})} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in \text{Im}(p_k)} = 0_E$$

Or la somme $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ est une somme directe, ainsi, par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad j \neq i \Rightarrow p_i \circ p_j(x) = 0$$

Ainsi

Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

4. On a montré à la question 3 que, si pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q_k est un projecteur.

On vient de montrer que, si q_k est un projecteur alors, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

En conclusion

q_k est un projecteur si et seulement si pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.